Curriculum Vitae

Simon Raulot (Université de Neuchâtel)

Données personnelles

Simon RAULOT
Docteur en mathématiques, Post-doctorant,
Institut de Mathématiques, Université de Neuchâtel
Rue Emile Argand 11, 2007 Neuchâtel (Suisse).
Téléphone: +41 (0)32 718 28 32
Email: `simon.raulot@unine.ch`
Page web: `http://simonraulot.free.fr/`
Adresse personnelle: Rue Moulins 10, 2105 Travers (Suisse).
Téléphone personnel fixe: +41 (0)32 863 16 40
Téléphone personnel portable: 06 83 36 39 85

Nationalité Française
Né le 19 décembre 1980 à Saint-Dizier (52)
Situation de famille: célibataire

Cursus

Juin 2006:	**Doctorat de mathématiques**: *Aspect conforme de l'opérateur de Dirac sur une variété à bord* (soutenance le 6 juin 2006), Université Henri Poincaré Nancy I, sous la direction de Oussama Hijazi et Emmanuel Humbert.
Juin 2003:	**DÉA de Géométrie Différentielle et Analyse Globale**, mention *Bien*, Université Henri Poincaré Nancy I. Mémoire: *Géométrie spinorielle et théorèmes de la masse positive*, sous la direction de Oussama Hijazi.
Juin 1997:	**Baccalauréat série S**, Lycée ESTIC, Saint-Dizier.

Thèse de doctorat

Titre: Aspect conforme de l'opérateur de Dirac sur une variété à bord.

Soutenue le: 06 juin 2006

Devant la commission d'examen formée de:

Sylvestre Gallot	Professeur, Grenoble	**Président**
Rod Gover	Professeur, Auckland	**Invité**
Marc Herzlich	Professeur, Montpellier	**Rapporteur**
Oussama Hijazi	Professeur, Nancy I	**Directeur de thèse**
Emmanuel Humbert	Maître de conférences habilité, Nancy I	**Directeur de thèse**
Sebastián Montiel	Professeur, Grenade	**Rapporteur**
Michel Vaugon	Professeur, Paris VI	**Examinateur**

Publications, prépublications et articles en cours de rédaction

1. Optimal eigenvalue estimates for the Dirac operator on domains with boundary, *Letters in Mathematical Physics* **73**, No. 2, 135-145 (2005).
2. The Hijazi inequality on manifolds with boundary, *Journal of Geometry and Physics* **56**, No. 11, 2189-2202 (2006).
3. On a spin conformal invariant on manifolds with boundary, *Mathematische Zeitschrift* **261**, No. 2, 321-349 (2009).
4. Green functions for the Dirac operator under local boundary conditions and applications, Prépublication IECN, Arxiv:math/0703197 (soumis).
5. Branson's Q-curvature in Spin Geometry (with O. Hijazi), *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications* **3** (2007), 119, 14 pages.
6. Rigidity of compact Riemannian spin manifolds with boundary, *Letters in Mathematical Physics* **86**, No. 2, 177-192 (2008).
7. A Sobolev-like inequality for the Dirac operator, à paraître dans *Journal of Functional Analysis*.
8. Positive mass theorem for the Paneitz-Branson operator (with E. Humbert), Prépublication UNINE, Arxiv:math/0807.2432 (soumis).
9. Dirac operators on hypersurfaces in solutions of the Einstein equations (en cours de rédaction).
10. The Hodge Laplacian on embedded hypersurfaces (en cours de rédaction).

Exposés, invitations

Invitations

- *Février 2009*, Université de Fribourg.
- *Mars 2008,* Université de Lyon.
- *Mars 2008,* Université d'Avignon.
- *Février 2008,* Université de Grenoble.
- *Février 2008,* Université de Neuchâtel.
- *Juin 2007,* INRIA Nancy.
- *Février 2007,* Université de Nice.
- *Mai 2006,* Université de Postdam.
- *Mars 2006,* Université de Neuchâtel.

Dans le cadre du Séminaire de Géométrie Différentielle de l'IECN

- *Octobre 2005:* Estimations de valeurs propres de l'opérateur de Dirac sur une variété à bord.
- *Novembre 2004:* Un invariant spinoriel conforme II.
- *Novembre 2004:* Un invariant spinoriel conforme I.
- *Décembre 2003:* Une minoration conforme de la première valeur propre positive de l'opérateur de Dirac.
- *Juin 2003:* Géométrie spinorielle et théorèmes de la masse positive.

Dans le cadre d'un groupe de travail

- Plusieurs exposés dans le cadre du groupe de travail sur "le théorème de l'indice" des doctorants géomètres de l'IECN: *Le noyau de la chaleur.*

Participation à des cours, Colloques et groupes de travail

- Geometric Spectral Theory, Université de Neuchâtel, Juin 2009 (organisateur avec B. Colbois et P. Ghanaat).
- Séminaire Borel "New approaches to curvature", Les Diablerets, Août 2008.
- Semaine de préparation au Séminaire Borel "New approaches to curvature", Université de Fribourg, Juin 2008.
- Semaine de Géométrie, Université de Neuchâtel, février 2008 (organisateur avec F. Balacheff et B. Colbois).
- Conférence "Variétés d'Einstein aujourd'hui et demain", CIRM, novembre 2007.
- "*Differential Geometry, Mathematical Physics, Mathematics and Society*", Conférence en l'honneur de Jean-Pierre Bourguignon, IHÉS et École Polytechnique, août 2007.
- Semaine "*Théorie spectrale et Géométrie*", Université de Neuchâtel, février 2007.
- Cours: *Variétés de Calabi-Yau et variétés à holonomie G_2*, Nancy, mars 2006, organisé par l'école doctorale IAEM de Lorraine.
- Journée Nancéienne de Géométrie de 2004 à 2009.
- Groupe de travail de l'équipe de Géométrie Différentielle de l'IÉCN: *Flot de Ricci.*
- Groupe de travail des doctorants géomètres de l'IÉCN: *Théorème de l'indice.*

Enseignement

Titre	Structure	Établissement	Période	Heures
Analyse Fonctionnelle	Master 1	Neuchâtel	07/08	28
Géométrie Différentielle	Master 1	Neuchâtel	07/08	28
Compléments d'Analyse	Math. 3	Neuchâtel	07/08	56
Algèbre linéaire	Math. 1	Neuchâtel	07/08	28
Analyse 2	LMI 2	Nancy I	06/07	60
Outils mathématiques	LSM 1	Nancy I	05/06	36
Probabilités	DEUG MIAS 2	Nancy I	03/04	60
Analyse 1	DEUG MIAS 1	Nancy I	03/04	36

Compétences informatiques et Langues

- Bonne connaissance des systèmes d'exploitation **Linux** et **Windows**.
- Maîtrise de **LaTeX**, **Maple**, **Word**, **Excel**, **PowerPoint**
- Maîtrise du language **HTML**.
- **Anglais** lu, écrit, parlé.
- **Allemand** scolaire.

Autres activités, Loisirs

- *Été 1999 à Été 2003*: Agent de production, ESSILOR, Ligny-en-Barrois (55)
- *Septembre 2001 à Juin 2006*: Cours particuliers de Mathématiques (Niveau Seconde à Licence)
- Cinéma, lecture
- Musique (guitare, basse, batterie)

Rapport de Recherche

Simon Raulot (Université de Neuchâtel)

Domaine de recherche : Géométrie riemannienne, spinorielle et Analyse sur les variétés

Présentation des travaux de recherche

Depuis le début de ma thèse, mon travail de recherche porte principalement sur l'étude de certains opérateurs différentiels elliptiques apparaissant naturellement en géométrie riemannienne et spinorielle, en particulier sur les variétés à bord.

Un des points de départ de mon travail de thèse est le problème de Yamabe sur les variétés à bord étudié par J. Escobar [Esc92b]. Ce problème fait intervenir le laplacien conforme sous une certaine condition à bord apparaît naturellement de façon géométrique. Il est important de noter que cette condition possède une propriété de covariance conforme.

Rappelons briévement ce problème et les grandes lignes de sa résolution. Soit (M^n, g) une variété compacte riemannienne de dimension n dont le bord ∂M est lisse. Le problème de Yamabe sur les variétés à bord se pose de la manière suivante: *Existe-t-il une métrique $\overline{g}$ conforme à g dont la courbure scalaire est constante et la courbure moyenne est nulle?* Les techniques employées par Escobar pour résoudre ce problème reposent sur les idées développées par Aubin [Aub76a] et Schoen [Sch84] et demandent un travail considérable tant au niveau géométrique qu'analytique. Soit donc (M^n, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ dont le bord ∂M est non vide et soit $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ une fonction lisse strictement positive. Si on note $N = \frac{2n}{n-2}$ et $\overline{g} = f^{\frac{4}{n-2}} g \in [g]$, où $[g]$ est la classe conforme de g, les courbures scalaires et moyennes de g et $\overline{g}$ sont reliées par:

$$Lf = R_f \, f^{N-1} \qquad \text{et} \qquad Bf_{|\partial M} = H_f \, f_{|\partial M}^{\frac{N}{2}} \tag{1}$$

où R_f (resp. H_f) est la courbure scalaire de la variété $(M^n, \overline{g})$ (resp. la courbure moyenne de $(\partial M, \overline{g})$ dans $(M, \overline{g})$) et L (resp. B) est le laplacien conforme (resp. l'opérateur de courbure moyenne conforme) défini par:

$$L := \frac{4(n-1)}{n-2}\Delta + R \quad (\text{resp.} \quad B := -\frac{2}{n-2}\frac{\partial}{\partial \nu} + H).$$

Dans l'expression précédente, Δ désigne le laplacien scalaire et ν est le champ unitaire normal rentrant à ∂M. Ainsi trouver une métrique conforme à g dont la courbure scalaire est constante et la courbure moyenne du bord est nulle est équivalent à prouver l'existence d'une solution lisse strictement positive f au système (1) avec R_f constante et $H_f = 0$. En utilisant des méthodes classiques de minimisation, le problème à bord (1) se résout assez facilement si l'exposant N est remplacé par un exposant $q \in]2, N[$. Cependant, le cas où $q = N$ (et donc le cas qui permet de traiter Yamabe) ne peut se résoudre par ces méthodes car la compacité de l'inclusion $\mathrm{H}_1^2(M) \hookrightarrow \mathrm{L}^{\mathrm{N}}(M)$ est perdue tandis que si $q < N$, elle est conservée. Dans [Esc92b], Escobar considère la fonctionnelle définie par:

$$Y(u) \quad = \quad \frac{\int_M \left(4\frac{n-1}{n-2}|\nabla u|^2 + Ru^2\right)dv + 2(n-1)\int_{\partial M} \mathrm{H} u^2 ds}{\left(\int_M |u|^N dv\right)^{\frac{2}{N}}} \tag{2}$$

pour $u \in \mathrm{C}^\infty(M)$, $u \neq 0$ et montre que si f minimise cette fonctionnelle alors elle satisfait au sens faible le problème à bord:

$$\begin{cases} Lf = \mu(M, \partial M)\, f^{N-1} & \text{sur } M \\ Bf_{|\partial M} = 0 & \text{le long de } \partial M \end{cases}$$

où $\mu(M, \partial M) := \inf Y(u)$ est l'invariant de Yamabe de M (cet invariant est un invariant conforme, i.e. il ne dépend que de la classe conforme de la métrique g). Les théorèmes de régularité classiques et le principe du maximum assurent que dans ce cas $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ et $f \geq 0$. Cependant, la situation $f \equiv 0$ n'est en aucun cas exclue. Escobar remarque alors que si:

$$\mu(M, \partial M) < \mu(\mathbb{S}^n_+, \partial \mathbb{S}^n_+), \tag{3}$$

où $\mu(\mathbb{S}^n_+, \partial \mathbb{S}^n_+)$ est l'invariant de Yamabe de l'hémisphère de dimension n muni de sa structure conforme standard, la fonction f est strictement positive. La résolution du problème de Yamabe est ainsi ramenée à une étude fine de l'invariant de Yamabe, entreprise elle aussi dans [Esc92b].

Si la variété M possède une structure spinorielle, on peut définir un autre opérateur partageant la même propriété de covariance conforme que celle du laplacien conforme, l'opérateur de Dirac agissant sur les sections du fibré des spineurs de M. Outre l'aspect analytique, le cadre spinoriel fait intervenir des difficultés supplémentaires par rapport au cas du laplacien (scalaire ou conforme). Il faut par exemple porter une attention particulière à la restriction des champs de spineurs au bord (voir par exemple [Bur93], [Tra95] ou [Bär98]). Cependant, malgré ces difficultés techniques supplémentaires, l'opérateur de Dirac se trouve être un outil très puissant dans l'étude de la géométrie des variétés à bord. Un exemple frappant dans ce contexte en est la preuve de Witten (voir [Wit81], [PT82] ou [LP87]) du théorème de la masse positive issu de la relativité générale. La simplicité de cette approche contraste ostensiblement avec les techniques utilisées par Schoen et Yau ([SY81], [SY79]) dans leur démonstration de ce résultat.
Dans l'esprit de l'approche de Witten de la masse positive, O. Hijazi, S. Montiel et X. Zhang [HMZ02] relient le spectre de l'opérateur de Dirac d'une hypersurface bordant un domaine compact d'une variété à la première valeur propre de l'opérateur de courbure moyenne conforme. Leur approche repose une fois de plus sur le caractère conforme du laplacien conforme, de l'opérateur de courbure moyenne conforme et de l'opérateur de Dirac mais aussi sur celui de la condition à bord qu'on lui impose.
Des travaux plus récents (voir [HMZ01b] ou bien [HMR02]) mettent en œuvre l'étude spectrale de l'opérateur de Dirac sur une variété à bord. Diverses conditions à bord sont étudiées et il est particulièrement apparent que le spectre de l'opérateur de Dirac dépend de manière conséquente de la condition à bord imposée.

Puisque le laplacien conforme et l'opérateur de Dirac partagent cette propriété de covariance conforme, on peut naturellement se demander s'il existe un lien analogue à celui du cas des variétés fermées dans le cas des variétés à bord. L'existence d'une telle relation passe évidemment par un choix adapté (c'est-à-dire invariant par changement conforme) d'une condition à bord pour l'opérateur de Dirac et par une bonne compréhension du problème de Yamabe sur les variétés à bord.

L'objectif principal des travaux de ma thèse était de mettre en évidence que l'étude spectrale de l'opérateur de Dirac liée à sa propriété de covariance conforme permet de relier des invariants conformes riemannien et spinoriel d'une variété à bord. Les quatres premiers articles présentés ci-dessous sont issus de mon travail de thèse [Rau06a].

1. [Rau05] S. Raulot, Optimal eigenvalue estimates for the Dirac operator on domains with boundary.

Letters in Mathematical Physics **73, No. 2 (2005) 135-145.**

Dans [HMR02], Hijazi, Montiel et Roldán étudient le spectre de l'opérateur de Dirac sur des domaines bornés Ω d'une variété riemannienne (M^n, g) sous diverses conditions à bord. En particulier, ils prouvent que la première valeur propre λ^{MIT} de l'opérateur de Dirac sous la condition à bord MIT satisfait l'estimation suivante:

$$|\lambda^{MIT}|^2 > \frac{n}{4(n-1)} \inf_{\Omega} (R)$$

où R est la courbure scalaire de Ω. Dans cet article, nous améliorons cette estimation en la rendant optimale, le cas limite étant caractérisé par l'existence d'un spineur de Killing imaginaire sur le domaine. Le résultat principal obtenu dans ce travail s'énonce alors:

Théorème 1 *Soit Ω un domaine compact d'une variété riemannienne spinorielle compacte dont la courbure moyenne H du bord $\partial\Omega$ est strictement positive. Alors sous la condition à bord MIT, toute valeur valeur propre λ^{MIT} satisfait*

$$|\lambda^{MIT}|^2 \geq \frac{n}{4(n-1)} \inf_{\Omega} (R) + n\,\mathrm{Im}(\lambda^{MIT}) \inf_{\partial\Omega} (H), \tag{4}$$

où $\mathrm{Im}(\lambda^{MIT})$ désigne la partie imaginaire du nombre complexe $\mathrm{Im}(\lambda^{MIT})$. De plus, on a égalité si et seulement si le domaine Ω possède un spineur de Killing imaginaire pur et si le bord $\partial\Omega$ est une hypersurface totalement ombilique à courbure moyenne constante.

2. [Rau06b] S. Raulot, The Hijazi inequality on manifolds with boundary. *Journal of Geometry and Physics* 56, No. 11 (2006) 2189-2202.

Dans ce travail, deux conditions à bord locales pour l'opérateur de Dirac sont étudiées: la condition à bord CHI associée à un opérateur de chiralité et la condition MIT. Les résultats obtenus utilisent le caractère conforme de l'opérateur de Dirac (sous ces conditions à bord) et celui du laplacien conforme permettant, entre autres, de relier leurs premières valeurs propres. En particulier, on prouve l'inégalité suivante:

Théorème 2 *Soit (Ω^n, g) une variété riemannienne spinorielle compacte de dimension $n \geq 3$, à bord non vide $\partial\Omega$ et possédant un opérateur de chiralité Γ. Alors, sous la condition à bord CHI, le spectre de l'opérateur de Dirac fondamental de Ω est une suite non bornée de nombres réels $\{\lambda_k^{CHI} \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$ dont la première valeur propre satisfait l'inégalité:*

$$\left(\lambda_1^{CHI}\right)^2 \geq \frac{n}{4(n-1)}\mu_1(L).$$

De plus, on a égalité si et seulement si Ω est isométrique à un hémisphère standard.

Le réel $\mu_1(L)$ désigne ici la première valeur propre du laplacien conforme sous la condition à bord suivante:

$$\begin{cases} Lu := 4\frac{n-1}{n-2}\Delta u + Ru = \mu_1(L)u & \text{sur } \Omega \\ Bu_{|\partial\Omega} := -\frac{2}{n-2}\frac{\partial u}{\partial \nu} + Hu = 0 & \text{le long de } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Δ est le laplacien standard sur (Ω, g), ν est le champ normal unitaire rentrant à $\partial\Omega$ et R (resp. H) est la courbure scalaire (resp. la courbure moyenne) de (Ω, g) (resp. de $(\partial\Omega, g)$ dans (Ω, g)). En dimension deux, on a un analogue donné par:

Théorème 3 *Soit (Ω^2, g) une surface riemannienne compacte à bord non vide. Sous la condition à bord CHI, le spectre de l'opérateur de Dirac D de Ω est une suite non bornée de nombres réels $\{\lambda_k^{CHI} \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$ dont la première valeur propre satisfait:*

$$\left(\lambda_1^{CHI}\right)^2 \geq \frac{2\pi\chi(\Omega, \partial\Omega)}{\mathrm{Aire}(\Omega^2, g)}, \tag{5}$$

où

$$4\pi\chi(\Omega, \partial\Omega) = \int_\Omega R dv + 2\int_{\partial\Omega} H ds$$

est la caractéristique d'Euler-Poincaré de Ω^2. De plus, l'égalité est atteinte pour la première valeur propre pour l'hémisphère ronde.

Des résultats similaires sont obtenus pour la condition MIT.

3. [Rau09c] S. Raulot, On a spin conformal invariant on manifolds with boundary. *Mathematische Zeitschrift* 261, No. 2 (2009) 321-349.

Dans cet article, on définit un invariant spinoriel conforme sur une variété à bord compacte, riemannienne et munie d'une structure spinorielle. On notera (Ω^n, g) cette variété. Cet invariant est défini à partir de la première valeur propre de l'opérateur de Dirac sous la condition associée à un opérateur de chiralité et peut être considéré comme un analogue spinoriel de l'invariant de Yamabe. Plus précisément, si $\lambda_1(\overline{g})$

désigne la première valeur propre de l'opérateur de Dirac $D_{\overline{g}}$ (dans une métrique conforme $\overline{g} = f^2 g \in [g]$) sous la condition à bord CHI, on pose alors:

$$\lambda_{\min}(\Omega, \partial\Omega) := \inf_{\overline{g}\in[g]} \{|\lambda_1(\overline{g})| \mathrm{vol}(\Omega, \overline{g})^{\frac{1}{n}}\},$$

où $[g]$ est la classe conforme de g. Un des principaux résultats obtenus après un travail assez conséquent s'énonce simplement par:

Théorème 4 *Soit* (Ω^n, g) *une variété riemannienne spinorielle compacte à bord non vide* $\partial\Omega$ *possédant un opérateur de chiralité* Γ. *Alors si* $n \geq 2$, *on a:*

$$\lambda_{\min}(\Omega, \partial\Omega) \leq \lambda_{\min}(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+) = \frac{n}{2}\Big(\frac{\omega_n}{2}\Big)^{\frac{1}{n}}, \tag{6}$$

où $\mathbb{S}^n_+$ *désigne l'hémisphère standard et* $\omega_n = \mathrm{vol}(\mathbb{S}^n, g_{st})$.

La démonstration de ce résultat se scinde en quatre parties distinctes:

- trouver un caractérisation variationnelle adaptée de $\lambda_{\min}(\Omega, \partial\Omega)$
- l'étude détaillé du cas de l'hémisphère ronde $\mathbb{S}^n_+$
- la construction d'une trivialisation adaptée du fibré des spineurs au voisinage d'un point $p \in \partial\Omega$
- la construction d'un spineur-test et son évaluation dans la caractérisation variationnelle précédemment obtenue.

Une des questions naturelles qui découle de ce résultat est alors de pouvoir déterminer des cas dans lesquels cette inégalité est stricte (c'est une partie du travail qui suit). En effet, si (13) est stricte, on peut montrer l'existence d'une solution à un problème à bord elliptique non linéaire pour l'opérateur de Dirac (cette question est abordée dans [Rau09d]).

4. [Rau07] S. Raulot, Green functions for the Dirac operator under local boundary conditions and applications.
Soumis. **ArXiv:math/**0703197.

Dans ce travail, on se propose de définir et d'étudier la fonction de Green de l'opérateur de Dirac sous les deux conditions à bord locales étudiées dans les travaux précédents. Ce travail ainsi effectué on donne deux applications de ces constructions.

La première de ces applications permet d'obtenir des cas pour lesquels l'inégalité (13) est stricte. Pour cela, il faut étudier en détail le comportement de la fonction de Green de l'opérateur de Dirac sous la condition à bord associée à un opérateur de chiralité. Cela conduit en particulier à la construction et à l'étude de l'opérateur de masse chiral. Cet opérateur est défini comme le "terme constant" dans le développement de la fonction de Green au voisinage d'un point du bord (voir ci-dessous où le cas du laplacien conforme est rapidement traité). Ainsi on peut vérifier que si cet opérateur est non nul (dans un sens précis) alors l'inégalité (13) est stricte.

La deuxième application est donnée par une preuve simple du théorème de la masse positive (dans sa forme faible) pour les variétés asymptotiquement plates obtenues par éclatement conforme par la fonction de Green du laplacien conforme. Plus précisément, si on considère une variété riemannienne compacte (Ω^n, g) localement conformément plate dont le bord lisse $\partial\Omega$ est totalement ombilique, on peut montrer que si l'invariant de Yamabe $\mu(\Omega, \partial\Omega)$ de cette variété est strictement positif et si $q \in \partial\Omega$ alors le laplacien conforme L possède une unique fonction de Green strictement positive $\mathcal{G}_q$ sous la condition à bord B, i.e. une fonction définie et lisse sur $\Omega \setminus \{q\}$ satisfaisant, au sens des distributions, le problème à bord:

$$\begin{cases} L\mathcal{G}_q & = \delta_q \quad \text{sur } \Omega \\ B\mathcal{G}_{q|\partial\Omega} & = \delta_q \quad \text{le long de } \partial\Omega \end{cases}$$

où δ_q est la masse de Dirac au point q. On peut ensuite vérifier qu'il existe une métrique conforme à la métrique initiale g dans laquelle la fonction de Green possède au voisinage du point q, le développement suivant:

$$\mathcal{G}_q(x) = \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}r^{n-2}} + \mathrm{A} + \alpha_q(x) \tag{7}$$

où $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ et α_q est une fonction harmonique (au voisinage de q) satisfaisant $\alpha_q(q) = 0$ et $\frac{\partial \alpha_q}{\partial \nu} = 0$ où ν est le champ unitaire normal à $\partial\Omega$. Le théorème de la masse positive pour le problème de Yamabe dans le cadre des variétés à bord s'énonce alors sous la forme suivante:

La constante A *vérifie* $\mathrm{A} \geq 0$*. De plus,* $\mathrm{A} = 0$ *si et seulement si* Ω *est conformément isométrique à l'hémisphère ronde* $\mathbb{S}^n_+$*.*

On en donne ici une preuve simple basée sur la construction de la fonction de Green de l'opérateur de Dirac sous la condition à bord MIT.

Les articles qui suivent sont des projets réalisés durant mon année d'ATER à l'Université de Nancy I et depuis mon arrivée à l'Université de Neuchâtel.

5. [HR07] O. Hijazi, S. Raulot, Branson's Q-curvature in Riemannian and Spin Geometry.

Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications **3 (2007), 119, 14 pages.**

Cet article est une contribution au "Proceedings of the 2007 Midwest Geometry Conference in honor of Thomas P. Branson", l'objectif étant d'y présenter d'anciens résultats de géométrie spinorielle, de nouveaux résultats de géométrie riemannienne et de les mettre en relation. En effet, dans ce travail, on commence par rappeller la notion d'opérateur covariant conforme et on en donne trois exemples: le laplacien conforme, l'opérateur de Paneitz-Branson et l'opérateur de Dirac. On insiste en particulier sur ce dernier puisque il se place dans un cadre un peu différent des deux premiers. On donne alors la démonstration d'un résultat de O. Hijazi reliant les premières valeurs propres de l'opérateur de Dirac et du laplacien conforme. La preuve repose sur un argument maintenant classique en géométrie spinorielle qui s'averrera des plus utiles pour la suite. En effet, un argument similaire permet d'obtenir de nouveaux résultats reliant le spectre du laplacien conforme et de l'opérateur de Paneitz. Rappellons briévement la définition de l'opérateur de Paneitz et de la Q-courbure. Sur une variété riemannienne (M^n, g) de dimension $n \geq 4$, la Q-courbure de la métrique g est définie par:

$$Q := \frac{n^2-4}{8n(n-1)^2}R^2 - \frac{2}{(n-2)^2}|E|^2 + \frac{1}{2(n-1)}\Delta R,$$

où Δ est le laplacien sur les fonctions, R est la courbure scalaire dans la métrique g, $|E|$ est la norme du tenseur d'Einstein $E := \mathrm{Ric} - \frac{R}{n}g$ et Ric est la courbure de Ricci de g. L'opérateur de Paneitz-Branson introduit pour $n = 4$ par Paneitz dans [Pan83] et étendu aux dimensions supérieures ou égales à 5 par Branson [Bra85], est défini pour $u \in C^\infty(M)$ par:

$$Pu := \Delta^2 u - \mathrm{div}\ (Adu) + \frac{n-4}{2}Qu$$

où:

$$A := \frac{(n-2)^2+4}{2(n-1)(n-2)}Rg - \frac{4}{n-2}\mathrm{Ric}.$$

Le premier résultat que l'on obtient dans ce travail relie, en dimension 4, la première valeur propre du laplacien conforme et un invariant conforme, l'intégrale de la Q-courbure de Branson:

Théorème 5 *Soit (M^4, g) une variété riemannienne compacte de dimension 4. Alors la première valeur propre du laplacien conforme $\lambda_1(L)$ satisfait:*

$$\lambda_1(L)^2 \geq \frac{24}{\mathrm{Vol}(M^4, g)} \int_M Q dv.$$

De plus, si $\int_M Q dv > 0$, on a égalité si et seulement si g est une métrique d'Einstein.

De la même manière si la dimension de la variété est supérieure ou égale à 5, on obtient:

Théorème 6 *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 5$. Si la première valeur propre de l'opérateur de Paneitz-Branson $\lambda_1(P)$ est strictement positive, on a:*

$$\lambda_1^2(L) \geq \frac{16n(n-1)^2}{(n^2-4)(n-4)} \lambda_1(P).$$

De plus, on a égalité si et seulement si g est une métrique d'Einstein.

6. [Rau08] S. Raulot, Rigidity of compact Riemannian spin manifolds with boundary.

Letters in Mathematical Physics **86, No. 2 (2008) 177-192.**

Un exemple frappant de l'utilisation des spineurs en géométrie pseudo-riemannienne est la preuve de Witten du théorème de la masse positive pour les variétés spin asymptotiquement plates [Wit81]. À l'aide de ce théorème, on peut énoncer des résultats de rigidités pour certaines variétés riemanniennes. Par exemple, on montre que sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, il n'existe pas de métrique à courbure scalaire positive et plate en dehors d'un compact, à l'exception de la métrique euclidienne. Depuis le travail de Witten, de nombreux résultats de ce type ont été obtenus en utilisant cette approche par les spineurs pour des variétés non compactes dont l'infini est modelé sur des espaces particuliers (voir par exemple [MO89] et [AD98] pour le cadre hyperbolique ou encore [Her98] pour le cadre de l'espace hyperbolique complexe de dimension impaire).

Récemment de nouveaux résultats de rigidités ont été obtenus dans le cadre des variétés à bord. Plus précisément, une question des plus naturelles pour ce type de variétés est la suivante: si on note $(M, \partial M, g)$ une variété à bord munie d'une métrique riemannienne g, quelle influence la géométrie du bord $(\partial M, g)$ peut-elle avoir sur le comportement de la métrique g à l'intérieur de M? Une première étape pour aborder cette question consiste à restreindre fortement la géométrie du bord et alors de voir ce que l'on peut en déduire sur la géométrie de la variété toute entière. Des résultats de ce type sont obtenus dans [SFT02] et [Mia03] où les auteurs donnent à l'aide de théorèmes de la masse positive une réponse à cette question dans le cas où le bord est isométrique à la sphère ronde $\mathbb{S}^{n-1}$. D'autres résultats utilisant ces théorèmes de masse positive sont prouvés en imposant d'autres restrictions sur la géométrie du bord. Une d'entre elles, en rapport avec la notion de masse "quasi-locale" en relativité générale, est de supposer l'existence d'une immersion isométrique du bord $(\partial M, g)$ dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, eucl)$ (voir [Mia03] ou bien [HW]). La plupart de ces énoncés exigent que la variété soit munie d'une structure spinorielle puisque leurs démonstrations reposent sur des théorèmes de la masse positive prouvés à la manière de Witten [Wit81].

D'autres part, de récents travaux de Hijazi, Montiel, Roldán et Zhang (voir [HMZ01a], [HMR03] ou encore [HM03]) mettent en évidence le rôle de la géométrie spinorielle en théorie des hypersurfaces. Dans ces travaux, les auteurs relient la première valeur propre de l'opérateur de Dirac du bord et des quantités prenant en compte la géométrie extrinsèque du bord (telles que la courbure moyenne ou bien un invariant de Yamabe intervenant dans le problème de Yamabe sur les variétés à bord [Esc92a]). À l'aide de ces estimations et d'une étude détaillée de leurs cas d'égalité, ils donnent, entre autres, une preuve du théorème d'Alexandrov [Ale56]. D'autres résultats de rigidités du type de ceux cités dans le paragraphe précédent sont obtenus. Le schéma de démonstration consiste à vérifier que sous certaines hypothèses sur les différentes courbure de la variété, des champs de spineurs très particuliers sur le bord (des spineurs de Killing dans ce cas) proviennent de champs de spineurs parallèles sur la variété toute entière, en restreignant ainsi fortement la géométrie.

Dans ce travail, on étudie le même type de questions en imposant l'existence de champs de spineurs plus généraux sur le bord, des spineurs satisfaisant l'équation de Dirac c'est-à-dire vérifiant:

$$\mathbf{D}\Phi = \frac{n-1}{2} H_0 \Phi, \tag{8}$$

où $\mathbf{D}$ est l'opérateur de Dirac du bord et H_0 est une fonction positive non identiquement nulle sur ∂M. Le résultat principal de cet article s'énonce de la façon suivante:

Théorème 7 *Si (M^n, g) est une variété riemannienne spin compacte à courbure scalaire $R \geq 0$ dont le bord est à courbure moyenne H et possédant un champ de spineurs Φ satisfaisant l'équation (8) avec $H \geq H_0$ alors le champ Φ se prolonge en un spineur parallèle sur M.*

À l'aide de ce théorème, on obtient des résultats de rigidités pour des variétés à bord dont le bord $(\partial M, g)$ est à courbure moyenne H et admet une immersion isométrique dans l'espace euclidien à courbure moyenne H_0. En effet, on a:

Théorème 8 *Soit (M^n, g_0) une variété riemannienne spinorielle de dimension n à courbure scalaire positive et soit (Σ^{n-1}, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n-1$. On suppose qu'il existe une immersion isométrique*

$$F_1 : (\Sigma^{n-1}, g) \to (M^n, g_0)$$

à courbure moyenne H_1 telle que $F_1(\Sigma^{n-1})$ borde un domaine compact Ω dans M. Alors si il existe une autre immersion isométrique

$$F_2 : (\Sigma^{n-1}, g) \to (\mathbb{R}^n, eucl)$$

à courbure moyenne $H_2 \geq 0$ satisfaisant $H_1 \geq H_2$, le domaine (Ω, g_0) est plat.

On est ainsi en mesure de répondre à une question posée par Schroeder et Strake [SS89] dans le cadre des variétés spinorielles. En effet, on obtient comme corollaire:

Corollary 1 *Soit (M^n, g) une variété compacte riemannienne spinorielle de dimension $n \geq 3$ dont la courbure scalaire satisfait $R \geq 0$ et à bord lisse non vide ∂M. Supposons de plus que chaque composante connexe du bord de M est simplement connexe, que leur courbure moyenne H est positive (non identiquement nulle) et que la courbure sectionnelle de M est nulle sur ∂M. Alors le bord n'a qu'une seule composante connexe et (M^n, g) est plate.*

Une autre application est donnée par une preuve simple du théorème de rigidité pour la boule euclidienne:

Corollary 2 *Soit (M^n, g) une variété compacte riemannienne spinorielle de dimension $n \geq 3$ à bord lisse ∂M dont la courbure scalaire satisfait $R \geq 0$. Supposons de plus que le bord ∂M de M est isométrique à la sphère standard $\mathbb{S}^{n-1}$ et que sa courbure moyenne vérifie $H \geq 1$. Alors (M^n, g) est isométrique à la boule unité de $\mathbb{R}^n$.*

Des résultats analogues sont obtenus pour des hypersurfaces bordant des domaines compacts d'une variété à courbure scalaire minorée par une constante négative, le rôle des spineurs parallèles étant tenus par des spineurs de Killing imaginaire dans ce contexte.

7. [Rau09d] S. Raulot, A Sobolev-like inequality for the Dirac operator. À paraître dans *Journal of Functional Analysis*.

Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Un théorème d'injection de Sobolev assure que l'espace H_1^2 des fonctions $u \in L^2$ avec $\nabla u \in L^2$ s'injecte continuement dans l'espace de Lebesgue L^N (avec $N = \frac{2n}{n-2}$). Ainsi il existe, deux constantes $A, B > 0$ telles que, pour tout $u \in H_1^2$:

$$\Big(\int_M |u|^N dv(g) \Big)^{\frac{2}{N}} \leq A \int_M |\nabla u|^2 dv(g) + B \int_M u^2 dv(g). \qquad S(A, B)$$

De nombreux travaux portent sur l'étude des meilleures constantes dans ce type d'inégalités (voir par exemple [Heb]). Plus précisément, si on définit la meilleure constante dans l'inégalité $S(A, B)$ par:

$$A_2(M) := \inf \mathcal{A}_2(M)$$

où:

$$\mathcal{A}_2(M) := \{A > 0 \,/\, \exists B > 0 \,\text{such that } S(A, B) \text{ holds for all } u \in C^\infty(M)\},$$

Hebey et Vaugon (voir [HV95] et [HV96]) montrent que $A_2(M) = K(n, 2)^2$. Ici $K(n, 2)^2$ est la meilleure constante de l'inégalité de Sobolev correspondante dans l'espace euclidien donnée par (voir [Aub76b] et [Tal76]):

$$K(n, 2)^2 = \frac{4}{n(n-2)\omega_n^{\frac{2}{n}}}$$

où ω_n est le volume de la sphère ronde de dimension n. Une application du problème des meilleures constantes en géométrie riemannienne a été découverte par Aubin [Aub76a] dans la résolution du problème de Yamabe. Ce problème s'énonce de la manière suivante: étant donné une variété riemannienne compacte (M^n, g) de dimension $n \geq 3$, peut-on trouver une métrique conforme à g telle que la courbure scalaire de cette métrique soit constante? Ce problème a été résolu en plusieurs étape par Yamabe [Yam60], Trüdinger [Tru68], Aubin [Aub76a] et finalement par Schoen [Sch84] en utilisant le théorème de la masse positive (voir [LP87]). Résoudre le problème de Yamabe est en fait équivalent à prouver l'existence d'une solution lisse et strictement positive $u \in C^\infty(M)$ à l'équation elliptique non linéaire suivante:

$$Lu := 4\frac{n-1}{n-2}\Delta u + Ru = \lambda u^{N-1}, \tag{9}$$

où L est le laplacien conforme, Δ (resp. R) est le laplacien agissant sur les fonctions (resp. la courbure scalaire) pour la métrique g et $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante. En effet, si une telle fonction existe, la métrique $\overline{g} = u^{N-2}g$ est conforme à g à courbure scalaire λ. Une approche variationnelle standard ne permet pas de résoudre directement cette équation puisque l'injection de Sobolev intervenant dans cette méthode est précisément celle où la compacité est perdue, rendant donc cette approche inefficace. Cependant, Aubin [Aub76a] démontre que si:

$$Y(M, [g]) = \inf_{f \neq 0} I(f) < Y(\mathbb{S}^n, [g_{st}]) = 4\frac{n-1}{n-2}K(n, 2)^{-2}, \tag{10}$$

où I est la fonctionnelle définie par:

$$I(f) = \frac{4\frac{n-1}{n-2}\int_M |\nabla f|^2 dv + \int_M Rf^2 dv}{\Big(\int_M |f|^N dv\Big)^{\frac{2}{N}}},$$

l'équation (9) possède une solution lisse et strictement positive. Cette condition met alors bien en évidence les relations entre le problème de Yamabe et la valeur de la meilleure constante dans $S(A, B)$.

Dans cet article, on étudie une équation similaire dans le contexte de la géométrie spinorielle. Plus précisément, on s'intéresse à l'existence de champs de spineurs φ satisfaisant l'équation elliptique non linéaire:

$$D\varphi = \Lambda H|\varphi|^{\frac{2}{n-1}}\varphi, \tag{11}$$

où D est l'opérateur de Dirac de (M^n, g), $\Lambda \in \mathbb{R}$ et H est une fonction lisse strictement positive sur M. Cette équation est fortement liée au problème d'immersion conforme de (M, g) en tant qu'hypersurface à courbure moyenne ΛH dans une variété possédant un spineur parallèle. Cette équation faisant intervenir des difficultés similaires à (9), le premier point de ce travail consiste à obtenir une inégalité de Sobolev avec une constante de Sobolev optimale dans le cadre spinoriel. On démontre alors un résultat de ce type donné par:

Théorème 9 *Soit (M^n, g, σ) une variété compacte riemannienne spinorielle et supposons que l'opérateur de Dirac est inversible. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante B_ε telle que:*

$$\Big| \int_M \mathrm{Re}\langle D\varphi, \varphi\rangle dv \Big| \leq \Big(K(n) + \varepsilon\Big)\Big(\int_M |D\varphi|^{\frac{2n}{n+1}} dv\Big)^{\frac{n}{n+1}} + B_\varepsilon \Big(\int_M |\varphi|^{\frac{2n}{n+1}} dv\Big)^{\frac{n}{n+1}} \tag{12}$$

pour tout $\varphi \in H_1^{\frac{2n}{n+1}}$ et où $K(n) = 2/(n\omega_n^{\frac{1}{n}})$ avec $\omega_n = \mathrm{vol}(\mathbb{S}^n, g_{\mathrm{st}})$.

Dans l'énoncé précédent, $H_1^{\frac{2n}{n+1}}$ désigne l'espace des spineurs $L^{\frac{2n}{n+1}}$-intégrables et tel que $\nabla\varphi \in L^{\frac{2n}{n+1}}$. Notons que la constante obtenue est "presque" optimale et peut être vu comme traduisant la continuité d'une injection de Sobolev. À l'aide de ce résultat, on est en mesure de donner un critère assurant l'existence d'un champ de spineurs satisfaisant l'équation (11):

Théorème 10 *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ munie d'une structure spinorielleet supposons que l'opérateur de Dirac est inversible. Si $H \in C^\infty(M)$ est une fonction lisse strictement positive sur M, alors on a:*

$$\Lambda \leq K(n)^{-1}(\max_M H)^{-\frac{n-1}{n}}. \tag{13}$$

De plus, si (13) est stricte alors l'équation (11) possède une solution non triviale.

On termine ce travail par spécifier un cas où on peut résoudre le problème étudié. Pour cela on utilise la construction de l'opérateur de masse [AHM] et un argument similaire à celui de Escobar et Schoen [ES86] pour le problème de prescription de la courbure scalaire dans une classe conforme. En effet, on démontre:

Théorème 11 *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ munie d'une structure spinorielle. On suppose que (M^n, g) est localement conformément plate et que $H \in C^\infty(M)$ est une fonction lisse strictement positive sur M tel qu'il existe un point $p \in M$ (où H atteint son maximum) où toutes ses dérivées partielles d'ordre au plus $(n-1)$ sont nulles. Alors si l'opérateur de Dirac est inversible et si l'opérateur de masse est non nul, il existe une solution non triviale à l'équation (11).*

8. [HR08] E. Humbert, S. Raulot, Positive mass theorem for the Paneitz-Branson operator. *Soumis*. **ArXiv:math/**0807.2432.

Dans ce travail en collaboration avec Emmanuel Humbert, on obtient un analogue du théorème de la masse positive intervenant dans la résolution du problème de Yamabe pour l'opérateur de Paneitz-Branson. Un énoncé du théorème de la masse positive pour Yamabe est donné dans le résumé ci-dessus de mon travail [Rau07] dans le cadre des variétés à bord et la définition de l'opérateur de Paneitz-Branson, ainsi que celle de la Q-courbure, dans le résumé de [HR07].

Rappelons que l'opérateur de Paneitz-Branson P est un opérateur elliptique auto-adjoint d'ordre quatre agissant sur les fonctions d'une variété riemannienne (M^n, g). Cet opérateur est fortement lié au problème de préscription de la Q-courbure dans une classe conforme au même titre que le laplacien conforme l'est au problème de prescrire la courbure scalaire dans une classe conforme. Si on suppose maintenant que:

1. g est localement conformément plate;

2. g est conforme à une métrique à courbure scalaire strictement positive (c'est-à-dire que son invariant de Yamabe est strictement positif);

3. l'opérateur P est positif,

on peut montrer que la fonction de Green $\mathcal{G}$ de P existe, est unique et lisse sur $M \setminus \{p\}$. Maintenant si on se place dans un voisinage plat U de $p \in M$ (ce qui es toujours possible à un changement de métrique conforme près grâce à l'hypothèse (1)), on peut vérifier que:

$$\mathcal{G}(x,p) = \frac{1}{2(n-2)(n-4)\omega_{n-1}r^{n-4}} + A + \alpha_p(x) \tag{14}$$

pour tout $x \in U$ et où ω_{n-1} est le volume de la sphère de dimension $(n-1)$, r la distance du point p au point x, $A \in \mathbb{R}$ et α_p est une fonction lisse telle que $\alpha_p(p) = 0$. Par analogie au cas du laplacien conforme, on peut vérifier que la masse A dépend de la métrique dans une classe conforme, mais pas son signe. Le principal résultat que nous obtenons dans ce travail s'énonce de la manière suivante:

Théorème 12 *Soit (M^n, g) une variété riemmanienne compacte de dimension $n \geq 5$. Sous les hypothèses* (1), (2), (3) *et si G_g est strictement positive sur $M \setminus \{p\}$, la masse A vérifie $A \geq 0$ avec egalité si et seulement si (M, g) est conformément difféomorphe à la sphère ronde de dimension n.*

La preuve de ce résultat s'inspire des preuves des théorèmes de la masse positive obtenues dans [AH05] et [Rau07]. La difficulté ici provient du fait que l'on ne dispose pas d'une formule de Bochner pour l'opérateur de Paneitz-Branson. Grâce à ce résultat, on affaiblit les hypothèses de validité d'un théorème de Hebey et Robert [HR04] sur la compacité de l'équation $Pu = Cu^{\frac{n+4}{n-4}}$ où C est une constante.

Projet de Recherche

Simon Raulot (Université de Neuchâtel)

Opérateurs covariants conformes en géométrie riemannienne et spinorielle et Analyse sur les variétés

Présentation des travaux de recherche en cours et futurs

Ce texte a pour objectif de présenter mes travaux de recherche actuels qui peuvent se distinguer selon les quatre axes suivants:

1. problèmes de type Yamabe en géométrie spinorielle
2. géométrie des hypersurfaces
3. la Q-courbure de Branson et ses applications
4. l'opérateur de Dirac sur des domaines de l'espace euclidien.

Il est clair que, bien que présentés séparément, ces thèmes interagissent fortement entre eux et sont reliés par la notion omniprésente d'opérateur covariant conforme. C'est donc plus par soucis de clarté que ce texte est présenté de cette manière.
Comme dit précédemment, la notion d'opérateur covariant conforme étant présente dans (presque) tous les travaux décrits ci-dessous, nous en rappelons la définition.

Definition 0.1 *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte et soit $[g] = \{g_u := e^{2u}g \,/\, u \in C^\infty(M)\}$ la classe conforme de la métrique g. Un opérateur géométrique $A := A_g$, formellement auto-adjoint agissant sur les fonctions (ou sur les sections d'un fibré vectoriel) sur (M^n, g) est dit covariant conforme de bidegré $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si:*

$$A_u(\,.\,) = e^{-bu}A(e^{au}\,.) \tag{15}$$

où $A_u := A_{g_u}$.

On peut citer plusieurs exemples de tels opérateurs apparaissant bien évidemment dans les travaux précédemment résumés. On a:

- le laplacien standard en dimension 2 est covariant conforme de bidegré $(0, 2)$,
- le laplacien conforme L en dimension $n \geq 3$ est covariant conforme de bidegré $(\frac{n-2}{2}, \frac{n+2}{2})$,
- l'opérateur de Dirac D est covariant conforme de bidegré $(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2})$,
- l'opérateur de Paneitz-Branson P est covariant conforme de bidegré $(\frac{n-4}{2}, \frac{n+4}{2})$.

I. Problèmes de type Yamabe en géométrie spinorielle

Comme rappelé précédemment, les inégalités de Sobolev interviennent de manière cruciale que ce soit dans le problème de Yamabe (ou plus généralement dans les équations liés à la prescription de certaines courbures dans une classe conforme) ou dans les équations de Dirac étudiées dans [Amm03] et [Rau09d]. Ces problèmes étant largement étudiés dans le cadre riemanien classique, on peut se poser le même type de questions dans le cadre des spineurs. En effet, en prenant en considération le Théorème 9 de [Rau09d], on peut envisager d'aborder, entre autres, la question suivante: *peut-on obtenir des inégalités de type Sobolev pour l'opérateur de Dirac pour d'autres injections de Sobolev? et si oui, qu'en est-il des problèmes de meilleures constantes pour ces inégalités?*

Un autre point sur lequel il serait intéressant de poursuivre est l'étude plus approfondie de la fonction de Green de l'opérateur de Dirac. En effet, de nombreuses questions se posent à ce sujet et plus précisément concernant l'opérateur de masse défini dans [AHM] (et [Rau07] dans le cadre des variétés à bord). Rappelons que cet opérateur est obtenu comme étant le terme "constant" apparaissant dans le développement de la fonction de Green de l'opérateur de Dirac au voisinage d'un point de la variété. La dénomination "opérateur de masse" provient de sa forte analogie avec la masse de la fonction de Green du laplacian conforme découverte par Schoen [Sch84] dans sa preuve du problème de Yamabe. En effet, le terme constant de la fonction de Green du laplacien conforme peut être interprété comme la masse d'une variété asymptotiquement plate obtenue par éclatement conforme de la variété de départ en un point. D'autre part, le théorème de la masse positive stipule que cette masse est non nulle à moins que la variété soit conformément isométrique à la sphère. Une question de ce type semble donc envisageable pour l'opérateur de masse. Cependant, obtenir un énoncé rigoureux d'un tel résultat est déjà très controversé puisqu'en dimension deux, cet opérateur est toujours nul. Il semble alors important de poursuivre dans cette direction afin de mieux comprendre cet opérateur.

D'autre part, la nature géométrique des équations de type Yamabe étudiées dans [Amm03] et [Rau09c] est encore à l'heure actuelle mal comprise et constitue donc un prolongement naturel des travaux précédents. Une des premières implications est une preuve spinorielle des problèmes de Yamabe dans le cadre des variétés fermés et à bord. D'autres applications peuvent être trouvées dans [Amm] et [AHA07] et ont pour cadre la théorie des hypersurfaces.

II. Géométrie des hypersurfaces.

1. [Rau09a] S. Raulot, Dirac operators on hypersurfaces in solutions of the Einstein equations.

En cours de rédaction.

Dans le cadre de l'utilisation de la géométrie spinorielle en géométrie des hypersurfaces, un de mes travaux en cours de rédaction [Rau09a] consiste à étudier le spectre de l'opérateur de Dirac sur des sous-variétés de codimension deux d'une variété lorentzienne satisfaisant les équations d'Einstein. Ce type de sous-variétés intervient de manière cruciale en relativité générale et notamment dans la théorie des trous noirs. Plus précisément, soit (N^4, g_N) une variété lorentzienne de dimension 4 satisfaisant les équations d'Einstein:

$$\widetilde{Ric} - \frac{1}{2}\widetilde{R}g_N = \mathcal{T}, \tag{16}$$

où $\widetilde{R}$ (resp. $\widetilde{Ric}$) est la courbure scalaire (resp. la courbure de Ricci) de (N, g_N). Ces équations relient le champ gravitationnel (dépendant de la métrique g_N) aux autres intéractions en présence modélisées par le tenseur impulsion-énergie $\mathcal{T}$. La question à laquelle je me suis intéressé est la suivante: si Σ^2 est une surface isométriquement immergée dans (N^4, g_N) et de type-espace (i.e. que la métrique g, induite par la métrique lorentzienne g_N sur Σ, est riemannienne), peut-on minorer la première valeur propre de l'opérateur de Dirac de (Σ^2, g) en fonction de quantités géométriques de N? J'obtiens une réponse affirmative à cette question en supposant que le tenseur impulsion-énergie satisfait une condition dîte d'énergie dominante et si Σ borde un domaine compact Ω d'une hypersurface de type-espace de N. En effet, on a:

Théorème 13 *Soit (Ω^3, g) une variété riemannienne compacte à bord lisse comme décrite précédemment. Supposons que le vecteur courbure moyenne de $\Sigma := \partial\Omega$ dans N soit de type-espace, alors la première valeur propre λ_1 de l'opérateur de Dirac de Σ satisfait:*

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{2}\inf_{\Sigma}\left(\sqrt{H^2 - \mathrm{Tr}_{\Sigma}(K)^2}\right) \tag{17}$$

où H (resp. K) est la courbure moyenne de Σ dans Ω (resp. de Ω dans N). De plus, si on a égalité, (Ω^3, g) s'immerge (localement) isométriquement dans l'espace-temps plat de Minkowski.

La démonstration repose sur les travaux de Schoen, Yau [SY81], Yau [Yau01] et Liu, Yau [LY06] et plus précisément sur la solvabilité de l'équation de Jang avec condition de Dirichlet. Dans ce même travail, on prouve que cette inégalité est aussi valable en toute dimension sous des conditions supplémentaires sur la courbure extrinsèque K du domaine Ω dans N. Ces conditions proviennent du fait que l'on ne peut pas résoudre l'équation de Jang si la dimension est grande. La méthode utilisée dans ce cadre est alors celle de Witten, c'est-à-dire en utilisant l'opérateur de Dirac-Witten (voir [Wit81] et [PT82]). Comme applications de ces résutats, on obtient des théorèmes de type-Alexandrov pour des hypersurfaces de codimension deux dans l'espace de Minkowski. On obtient aussi une unification des estimations obtenues dans [HMZ01a] et [HMR03].

2.[Rau09b] S. Raulot, The Hodge Laplacian on embedded hypersurfaces. *En cours de rédaction.*

Dans cette thématique et dans un travail en cours [Rau09b], je me suis récemment intéressé à ce type de questions pour un autre opérateur différentiel, l'opérateur de Hodge-De Rahm agissant sur les p-formes. Plus précisément, si (Σ^n, g) désigne une hypersurface de dimension n bordant un domaine compact Ω d'une variété (N^{n+1}, g), peut-on obtenir des estimations sur la première valeur propre du laplacien Δ_p^Σ de Σ agissant sur les p-formes? Pour le moment, on peut montrer (sous certaines hypothèses) un analogue de l'estimation de Gallot et Meyer [GM75] pour la première valeur propre de Δ_p^Σ. À la suite de ce premier résultat, j'ai discuté avec Alessandro Savo de l'Université La Sapienza de Rome qui m'a invité au Printemps 2009 afin de pouvoir approfondir dans cette direction.

III. La Q-courbure et ses applications.

Comme rappelé au début de cette section, l'opérateur de Paneitz-Branson définit un opérateur covariant conforme de bidegré $(\frac{n-4}{2}, \frac{n+4}{2})$ qui relie les Q-courbures de deux métriques conformes. En dimension 4, de nombreux travaux ont été et sont consacrés aux problèmes de prescription cette courbure, c'est-à-dire étant donné une variété riemannienne (M^4, g) et une fonction lisse $f \in C^\infty(M)$, peut-on trouver une métrique conforme à g dont la Q-courbure est f? Une liste non exhaustive est donnée par [SC95], [Gur99], [DM08] ou encore [SC95].

Avec O. Hijazi, nous nous sommes intéressés à la question suivante: de part la propriété de covariance conforme que partage les opérateurs de Dirac, Paneitz-Branson et Yamabe, peut-on établir une relation entre ces trois opérateurs? Nous avons donné un début de réponse à cette question dans [HR07] et nous avons pour projet de continuer dans cette direction et notamment dans le cas des dimensions $n \geq 5$. Une question analogue se pose en dimension 3 puisque l'opérateur de Paneitz-Branson est là-aussi bien défini.

Dans le même esprit que dans le problème de Yamabe, la fonction de Green de l'opérateur de Paneitz-Branson joue un rôle très important. Avec E. Humbert, nous avons obtenu un résultat de ce type pour des variétés dont la dimension est supérieure ou égale à cinq. Un analogue de de résultat est conjecturé en dimension 4 (voir [LLP]) et nous pensons étudier ce problème.

En collaboration avec Oussama Hijazi et Emmanuel Humbert, nous étudions certains invariants spinoriels conformes du bord d'une variété spin de dimension 4. La formule de Chern-Gauss-Bonnet met en évidence un invariant conforme scalaire du bord découvert par Chang et Qing [CQ97] qui serait intéressant de comprendre dans le cadre spinoriel.

IV. L'opérateur de Dirac sur des domaines de l'espace euclidien.

Dans [HMR02], Hijazi, Montiel et Roldán étudient le spectre de l'opérateur de Dirac sous quatre conditions à bord. Ils prouvent en particulier que sa première valeur propre (sous ces quatre conditions) est minorée par une constante faisant intervenir la courbure scalaire de la variété et donne donc des informations dans le cas où cette dernière est strictement positive.

Avec Bruno Colbois de l'Université de Neuchâtel, nous étudions ces conditions à bord dans le cadre des domaines bornés de l'espace euclidien (puisqu'en particulier les estimées de [HMR02] ne donnent aucune information dans ce cas). Les premiers résultats que nous obtenons sont prouvés à l'aide de techniques développées dans [GS03].

References

[AD98] L. Anderson and M. Dahl, *Scalar curvature rigidity for asymptotically locally hyperbolic manifolds*, Ann. Global. Anal. Geo. **16** (1998), 1–27.

[AH05] B. Ammann and E. Humbert, *Positive mass theorem for the Yamabe problem on spin manifolds*, GAFA **15** (2005), 567–576.

[AHA07] B. Ammann, E. Humbert, and M. Ould Ahmedou, *An obstruction for the mean curvature of the conformal immersion $\mathbb{S}^n$ into $\mathbb{R}^{n+1}$*, Proc. Amer. Math. Soc **137** (2007), no. 2, 489–493.

[AHM] B. Ammann, E. Humbert, and B. Morel, *Mass endomorphism and spinorial Yamabe type problem on conformally flat manifolds*, to appear in Comm. Anal. Geom.

[Ale56] A.D. Alexandrov, *Uniqueness theorems for the surfaces in the large I*, Vesnik Leningrad Univ. **11** (1956), 5–17.

[Amm] B. Ammann, *The smallest Dirac eigenvalue in a spin-conformal class and cmc-immersions*, Preprint.

[Amm03] ———, *A variational problem in conformal spin geometry*, Habilitationsschrift, Universität Hamburg (2003).

[Aub76a] T. Aubin, *Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*, J. Math. Pur. Appl. IX. Ser. (1976), 269–296.

[Aub76b] ———, *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, Jour. Diff. Geo. **11** (1976), 573–598.

[Bär98] C. Bär, *Extrinsic bounds of the Dirac operator*, Ann. Glob. Anal. Geom. **16** (1998), 573–596.

[Bra85] T.P. Branson, *Differential operators canonically associated to a conformal structure*, Math. Scand. **57** (1985), no. 2, 293–345.

[Bur93] J. Bureš, *Dirac operator on hypersurfaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. **34** (1993), 313–322.

[CQ97] S.Y.A. Chang and J. Qing, *The zeta functional determinants on manifolds with boundary I. the formula*, Journal of Functional Analysis **147** (1997), 327–362.

[DM08] Z. Djadli and A. Malchiodi, *Existence of conformal metrics with constant Q-curvature*, Ann. of Math. **168** (2008), no. 3, 813–858.

[ES86] J. F. Escobar and R. M. Schoen, *Conformal metrics with prescribed scalar curvature*, Inv. Math. **86** (1986), 243–254.

[Esc92a] J. F. Escobar, *Conformal deformation of a Riemannian metric to a scalar flat metric with constant mean curvature on the boundary*, Ann. of Math. **136** (1992), 1–50, Addendum in **139** (1994), 749-750.

[Esc92b] ———, *The Yamabe problem on manifolds with boundary*, J. Diff. Geom. **35** (1992), 21–84.

[GM75] S. Gallot and D. Meyer, *Opérateur de courbure et laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne*, J. Math. Pures. Appl. **(9) 54** (1975), no. 3, 259–284.

[GS03] P. Guerini and A. Savo, *Eigenvalue and gap estimates for the Laplacian acting on p-forms*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2003), no. 1, 319–344.

[Gur99] M. Gursky, *The principal eigenvalue of a conformally invariant differential operator, with an appcation to semilinear elliptic PDE*, Comm. Math. Phys. **207** (1999), no. 1, 131–143.

[Heb] E. Hebey, *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities*, Courant Lecture Notes in Mathematics **5**, American Mathematical Society.

[Her98] M. Herzlich, *Scalar curvature and rigidity of odd-dimensional complex hyperbolic spaces*, Math. Ann. **312** (1998), 641–657.

[HM03] O. Hijazi and S. Montiel, *Extrinsic Killing spinors*, Math. Zeit. **244** (2003), 337–347.

[HMR02] O. Hijazi, S. Montiel, and S. Roldán, *Eigenvalue boundary problems for the Dirac operator*, Comm. Math. Phys. **231** (2002), 375–390.

[HMR03] O. Hijazi, S. Montiel, and A. Roldán, *Dirac operator on hypersurfaces in negatively curved manifolds*, Ann. Global Anal. Geom. **23** (2003), 247–264.

[HMZ01a] O. Hijazi, S. Montiel, and X. Zhang, *Dirac operator on embedded hypersurfaces*, Math. Res. Lett. **8** (2001), 195–208.

[HMZ01b] ——, *Eigenvalues of the Dirac operator on manifolds with boundary*, Comm. Math. Phys. **221** (2001), 255–265.

[HMZ02] ——, *Conformal lower bounds for the Dirac operator on embedded hypersurfaces*, Asian J. Math. **6** (2002), 23–36.

[HR04] E. Hebey and F. Robert, *Compactness and global estimates for the geometric Paneitz equation in high dimensions*, Electronic Res. Announc. of the AMS **10** (2004), 135–141.

[HR07] O. Hijazi and S. Raulot, *Branson's Q-curvature in Riemannian and Spin Geometry*, SIGMA **3** (2007), no. 119, 14 pages.

[HR08] E. Humbert and S. Raulot, *Positive mass theorem for the Paneitz-Branson operator*, Preprint UNINE (2008).

[HV95] E. Hebey and M. Vaugon, *The best constant problem in the Sobolev embedding theorem for complete Riemannian manifolds*, Duke Math. J. **79** (1995), 235–279.

[HV96] ——, *Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **13** (1996), 57–93.

[HW] F. Hang and X. Wang, *On a conjecture of Schroeder and Strake*, to appear in Paci. Journ. of Math.

[LLP] J. Li, Y. Li, and L. Pan, *The Q-curvature on a 4-dimensional Riemannian manifold* (M, g) *with* $\int_M Qdv_g = 8\pi^2$, preprint.

[LP87] J. M. Lee and T. H. Parker., *The Yamabe problem*, Bull. Am. Math. Soc., New Ser. **17** (1987), 37–91.

[LY06] C.-C.M. Liu and S.-T. Yau, *Positivity of quasi-local mass II*, J. Amer. Math. Soc. **19** (2006), no. 1, 181–204.

[Mia03] P. Miao, *Positive mass theorem on manifolds admitting corners along a hypersurface*, Adv. Theor. Math. Phys. **6** (2003), 1163–1182.

[MO89] M. Min-Oo, *Scalar curvature rigidity of asymptotically hyperbolic spin manifolds*, Math. Ann. **285** (1989), 527–539.

[Pan83] S. Paneitz, *A quartic conformally covariant differential operator for arbitrary pseudo-Riemannian manifolds*, preprint (1983).

[PT82] T. Parker and C. Taubes, *On Witten's proof of the positive energy theorem*, Comm. Math. Phys. **84** (1982), 223–238.

[Rau05] S. Raulot, *Optimal eigenvalue estimates for the Dirac operator on domains with boundary*, Letters in Mathematical Physics **73** (2005), no. 2, 135–145.

[Rau06a] ______, *Aspect conforme de l'opérateur de Dirac sur une variété à bord*, Ph.D. thesis, Université Henri Poincaré, Nancy I, 2006.

[Rau06b] ______, *The Hijazi inequality on manifolds with boundary*, J. Geom. Phys. **56** (2006), 2189–2202.

[Rau07] ______, *Green functions for the Dirac operator under local boundary conditions and applications*, Prépublication IECN (2007).

[Rau08] ______, *Rigidity of compact Riemannian spin manifolds with boundary*, Letters in Mathematical Physics **86** (2008), no. 2, 177–192.

[Rau09a] ______, *Dirac operators on hypersurfaces in solutions of the Einstein equations*, En cours de rédaction (2009).

[Rau09b] ______, *The Hodge Laplacian on embedded hypersurfaces*, en cours de rédaction (2009).

[Rau09c] ______, *On a spin conformal invariant on manifolds with boundary*, Math. Zeit. **261** (2009), no. 2, 321–349.

[Rau09d] ______, *A Sobolev-like inequality for the Dirac operator*, à paraître dans J. Funct. Anal. (2009).

[SC95] P.C. Yang S.Y.A. Chang., *Extremal metrics of zeta functional determinants on 4-manifolds*, Ann. of Math. **142** (1995), 171–212.

[Sch84] R. Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*, J. Diff. Geom. **20** (1984), 473–495.

[SFT02] Y. Shi and L. Fai-Tam, *Positive mass theorem and the boundary behaviour of compact manifolds with nonnegative scalar curvature*, Jour. Diff. Geo. **62** (2002), no. 1, 79–125.

[SS89] V. Schroeder and M. Strake, *Rigidity of convex domains in manifolds with nonnegative ricci and sectional curvature*, Comment. Math. Helv. **64** (1989), 173–186.

[SY79] R. Schoen and S.T. Yau, *On the proof of the positive-action conjecture in quantum relativity*, Physical Review Letters **42** (1979), 547–548.

[SY81] ______, *Proof of the positive mass Theorem II*, Comm. Math. Phys. **79** (1981), 231–260.

[Tal76] G. Talenti, *Best constants in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. **110** (1976), 353–372.

[Tra95] A. Trautman, *The Dirac operator on hypersurfaces*, Acta Phys. Polon. **6** (1995), 1283–1310.

[Tru68] N.S. Trudinger, *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat., III. Ser. **22** (1968), 265–274.

[Wit81] E. Witten, *A new proof of the positive energy theorem*, Comm. Math. Phys. **80** (1981), 381–402.

[Yam60] H. Yamabe, *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Osaka Math. J. (1960), 21–37.

[Yau01] S.T. Yau, *Geometry of three manifolds and existence of black hole due to boundary effect*, Adv. Theor. Math. Phys. **5** (2001), 755–767.

Descriptif des enseignements

Simon Raulot (Université de Neuchâtel)

Enseignements

Durant mes trois premières années de thèse, j'ai pu effectuer des enseignements en tant que vacataire. Durant l'année 2006/2007, j'ai occupé un poste d'ATER à l'Institut Elie Cartan de l'Université Henri Poincaré de Nancy. L'année passée, j'étais Assistant/Post-Doctorant à l'Université de Neuchâtel et j'ai dispensé des cours et travaux dirigés en premier et deuxième cycle. Depuis octobre 2008, je suis post-doctorant et je n'ai donc pas de charges d'enseignements. Le tableau ci-dessous résume mes activités d'enseignement.

Titre	**Structure**	**Établissement**	**Période**	**Heures**
Analyse Fonctionnelle	Master 1	Neuchâtel	07/08	28
Géométrie Différentielle	Master 1	Neuchâtel	07/08	28
Compléments d'Analyse	Math. 3	Neuchâtel	07/08	56
Algèbre linéaire	Math. 1	Neuchâtel	07/08	28
Analyse 2	LMI 2	Nancy I	06/07	60
Outils mathématiques	LSM 1	Nancy I	05/06	36
Probabilités	DEUG MIAS 2	Nancy I	03/04	60
Analyse 1	DEUG MIAS 1	Nancy I	03/04	36

Descriptif

2007-2008: Master 1 de Mathématiques de Neuchâtel
Au deuxième semestre, j'ai dispensé des séances d'exercices d'Analyse Fonctionnelle pour les étudiants de Master de Mathématiques. Dans ce cours, nous avons étudié les grands théorèmes de l'analyse fonctionnelle (Banach-Steinhaus, Baire,...).

2007-2008: Master 1 de Mathématiques de Neuchâtel
Dans le cadre de la première année de Master de Mathématiques, j'ai eu en charge les séances d'exercices du cours de **Géométrie Différentielle** de B. Colbois. Nous avons abordé les notions suivantes: **introduction : définitions et exemples** (rappel de calcul différentiel, sous-variétés, variétés), **espace vectoriel tangent, champs de vecteurs** (espace vectoriel tangent, champs de vecteurs tangents, flot d'un champ de vecteurs), **métrique riemannienne et connexion de Levi-Civita** (variété riemannienne, connexion de Levi-Civita) et enfin les **géodésiques**.

2007-2008: Troisième année de Mathématiques de Neuchâtel
J'ai dispensé un cours et les séances d'exercices de **Compléments d'Analyse** pour des étudiants de troisième année de Bachelor (Licence) de Mathématiques. Nous avons étudié les thèmes suivants: **espaces métriques** (topologie associée à une distance,...), **espaces vectoriels normés et de Banach** (théorème de Riesz,...), **espaces de fonctions continues** (théorèmes de Stone, Weierstrass,...), **espace de Hilbert** (théorèmes de Riesz-Fréchet, Lax-Milgram,...), et enfin une courte introduction à la **théorie des opérateurs** (opérateurs compacts,...).

2007-2008: Première année de Mathématiques de Neuchâtel
Dans le cadre de la première année de Bachelor (Licence) de l'Université de Neuchaâtel, j'ai dispensé les séances d'exercices d'Algébre Linéaire pour la mathématiciens. En effet, cette section est composée d'étudiants se destinant soit à poursuivre des études de physique, soit de mathématiques. J'ai eu en charge les mathématiciens. Les notions abordées ont été les suivantes: **espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels**, **applications linéaires**, **calcul matriciel**, **formes bilinéaires et espaces vectoriels euclidiens**, **valeurs propres, vecteurs propres, déterminant** et finalement l'**étude des endomorphismes dans les espaces vectoriels euclidiens**.

2006-2007: Licence SM de Nancy I

Les étudiants de première année de Licence *Sciences de la matières* se destinent majoritairement à des études poussées en sciences physiques. Au cours du premier semestre, ils reçoivent un cours de mathématiques leur donnant les **outils mathématiques** nécessaires à leurs futur cours de physique. J'ai eu en charge un groupe de **SM1** lors de leurs travaux dirigés. Les notions enseignées étaient les bases de l'**algèbre linéaire**, la **trigonométrie**, les **fonctions usuelles**, les **équations différentielles linéaires** et les **nombres complexes**.

2006-2007: Licence MI de Nancy I
Dans le cadre de la deuxième année de Licence de Mathématiques et Informatique, j'ai dispensé des travaux dirigés d'analyse. Les notions abordées ont été les suivantes: l'**intégrale de Riemman**, les **intégrales généralisées**, les **séries numériques**, les **suites et séries de fonctions** et enfin les **séries entières**.

2003-2004: DEUG MIAS, deuxième année
Les étudiants de deuxième année de Deug MIAS ont le choix parmi plusieurs options durant le deuxième semestre. J'ai dispensé des travaux dirigés de l'une d'entre elles: *les probabilités.* Les notions enseignées dans ce cours sont les suivantes: **probabilité sur un ensemble fini**, **variables aléatoires réelles, espérance mathématique, variance**, **couples et vecteurs aléatoires** et enfin **probabilité sur un ensemble dénombrable**.

2003-2004: DEUG MIAS, première année
Dans le cadre de la première année du DEUG MIAS, j'ai effectué des travaux dirigés sur les thèmes suivants: **théories des ensembles**, **relations entre deux ensembles**, **suites de nombres réels**, **comportement asymptotique des fonctions**, **fonctions continues** et **fonctions dérivables**.